# P 20

# Actions électromagnétiques exercées sur un circuit

## 20.1 Rappel : effet Hall

Considérons un conducteur, par exemple un pavé, dans lequel se déplacent des particules chargées à la vitesse :

$$\overrightarrow{v} = v\ \overrightarrow{e_x}$$

Supposons l'existence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ porté par $\overrightarrow{e_y}$, orienté selon l'axe $Oy$. Une particule chargée subit alors la force de Lorentz :

$$\boxed{\overrightarrow{f} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}$$

Sous l'action de cette force de Lorentz , qui est portée par $\overrightarrow{e_z}$, les charges s'accumulent sur une des faces du conducteur.
On observe alors la création d'un champ électrique appelé champ de Hall et noté $\overrightarrow{E_H}$.
Ce champ électrique entraîne la création d'une différence de potentiel. L'action du champ magnétique et celle du champ électrique s'annulent lorsque le régime permanent est établi :

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{f} = q\,\overrightarrow{E_H} + q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

On en déduit donc que le champ électrique créé, suite à l'action du champ magnétique est :

$$\overrightarrow{E_H} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

De plus :

$$\overrightarrow{E_H} = -\overrightarrow{grad}\,V_H$$

En projetant sur $\overrightarrow{e_z}$, on obtient :

$$dV_H = B\,v\,dz$$

En intégrant entre $0$ et $d$ sur l'axe $z$, on obtient :

$$\begin{aligned} U &= V_H\,(d) - V_H\,(0) \\ &= v\,B\,d \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{cases} \overrightarrow{j} = \rho_m\,\overrightarrow{v} \\ i = \iint \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n}\ d^2S \end{cases}$$

On obtient donc l'expression de la tension créée par effet Hall :

$$U_H = \frac{I\,B\,d}{S\,\rho_m}$$

où $\rho_m$ est la densité volumique de charges mobiles.

## 20.2 Force de Laplace

### 20.2.1 Expression

**— Force de laplace —**

La force de Laplace est la force magnétique exercée sur un circuit placé dans un champ magnétique.
Considérons un conducteur parcouru par un courant. Les charges mobiles subissent la force de Lorentz, donnée par :

$$\overrightarrow{f} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Comme précédent, il apparaît un champ électrique d'expression :

$$\overrightarrow{E_H} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Mais le conducteur contient aussi des charges fixes $q_f$. Ces charges subissent l'action du champ électrique à travers la composante électrique de la force de Lorentz. On a alors :

$$\overrightarrow{F} = \sum q_f\,\overrightarrow{E} = -\iiint \rho_f\,d^2S\,d\ell\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

De plus :

$$\begin{cases} \rho_f + \rho_m = 0 \\ \overrightarrow{j} = \rho_m\,\overrightarrow{v} \end{cases}$$

On obtient donc l'expression de la force de Laplace :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \int i\,\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}}$$

Cette force s'applique sur les charges fixes.
Dans le cas d'un distribution volumique de courant, on obtient :

$$\overrightarrow{F} = \iiint_\tau \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\,d^3\tau$$

### 20.2.2 Définition légale de l'ampère

**— Définition de l'ampère —**

Considérons deux fils considérés comme infiniment longs parcourus par des courants de même sens et de même intensité $i$.
Par application du théorème d'Ampère et à l'aide des symétries, on obtient l'expression de la force exercée sur un des fils de la part de l'autre :

$$\overrightarrow{F} = \int \frac{\mu_0\,i^2\,d\ell}{2\,\pi\,r}\,\overrightarrow{e_r}$$

Pour des fils de longueur $\ell = 1\,m$ et distants de $r = 1\,m$, l'ampère est alors l'intensité du courant qu'il faut imposer dans ces deux fils pour obtenir une force $F$ de valeur $2.10^{-7}\,N$.

## 20.3 Torseur des forces exercées sur un circuit

### 20.3.1 Énergie d'interaction entre le champ et un circuit

#### 20.3.1.1 Travail des forces de Laplace

Considérons une portion de circuit $\overrightarrow{d\ell}$ qui, sous l'action d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ extérieur, effectue une translation de $\overrightarrow{d\lambda}$.

**— Force de Laplace —**

Par définition, la force de Laplace est :

$$d\overrightarrow{F} = i\,\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}$$

Déterminons le travail de cette force au cours de ce déplacement $\overrightarrow{d\lambda}$ :

$$\begin{aligned}
\delta^2 W &= d\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\lambda} \\
&= i\,\left(\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{d\lambda} \\
&= i\,\left(\overrightarrow{d\lambda} \wedge \overrightarrow{d\ell}\right) \cdot \overrightarrow{B} \text{ (Permutation circulaire )} \\
&= i\,\overrightarrow{n}\,d^2S \cdot \overrightarrow{B} \quad \text{( le produit vectoriel donne la normale multiplié par la surface engendrée par les deux vecteurs )} \\
&= i\,\delta^2\Phi_C
\end{aligned}$$

Avec $\Phi_C$ le flux coupé défini par :

$$\Phi_C = \iint \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{B}\,d^2S$$

On obtient :

$$W = i\,\Phi_C$$

et on montre, lorsque le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est permanent, que :

$$\Phi_C = \Delta\Phi$$

Avec $\Phi$ le flux propre du circuit, c'est à dire le flux qui traverse le circuit.

#### 20.3.1.2 Énergie d'interaction électromagnétique

Lorsque le champ $\overrightarrow{B}$ est permanent, le travail ne dépend que des positions initiale et finale du circuit.
On peut alors mettre $\Delta\Phi$ sous forme d'une différence d'énergie potentielle :

$$W = E_{p1} - E_{p_2} = i\,\Delta\Phi = i\,(\Phi_2 - \Phi_1)$$

en prenant $E_{pX} = -i\,\Phi_X$.
On obtient donc un principe d'évolution. Le circuit évolue dans le sens de la diminution de l'énergie potentielle, donc vers une augmentation du flux.

### 20.3.2 Dipôle magnétique dans un champ magnétique uniforme

#### 20.3.2.1 Mouvement de Translation

Considérons un dipôle magnétique qui, sous l'action d'un champ magnétique uniforme, subit une translation $\overrightarrow{d\lambda}$.
On obtient :

$$\begin{aligned}
\delta W &= i\,d\Phi \\
&= i\,(\Phi_2 - \Phi_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les deux surfaces sont identiquement orientées et parcourues par le même courant, donc la variation de flux propre est nulle. De plus, par définition, avec $\overrightarrow{R}$ la résultante de la force de Laplace :

$$\delta W = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{d\lambda}, \forall \overrightarrow{d\lambda}$$

La résultante de la force de Laplace est donc nulle.

#### 20.3.2.2 Mouvement de Rotation

De la même façon, mais cette fois ci en considérant un mouvement de rotation. Par définition :

$$\delta W = i\, d\Phi$$

De plus :

$$\begin{aligned}\Phi &= \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\, S \\ &= B\, S\, \cos\alpha\end{aligned}$$

où $\alpha$ est l'angle entre $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{n}$. Il vient :

$$\begin{aligned}\delta W &= -i\, B\, S\, \sin\alpha\, d\alpha \\ &= \Gamma_m\, d\alpha\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\Gamma_m}$ est le moment des forces magnétiques s'exerçant sur le dipôle magnétique.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_m} &= -i\, B\, S\, \sin\alpha\ \overrightarrow{e_z} \\ &= -B\, \mathcal{M}\, \sin\alpha\ \overrightarrow{e_z} \quad \text{(avec } \overrightarrow{M} \text{ le moment magnétique)} \\ &= \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}\end{aligned}$$

### 20.3.3 Dipôle magnétique dans un champ magnétique non uniforme

On a :

$$\overrightarrow{\Gamma_m} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$$

Par définition :

$$\overrightarrow{dF} = i\, \overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}$$

On obtient donc la résultante de la force de Laplace :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_m} &= \oint_\Gamma \overrightarrow{dF} \\ &= \oint_\Gamma i\, \overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}\end{aligned}$$

Déterminons la projection selon $\overrightarrow{e_x}$ de la résultante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_m} \cdot \overrightarrow{e_x} &= \oint_\Gamma i\, (\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{e_x} \\ &= \oint_\Gamma i\, (\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{d\ell}) \cdot \overrightarrow{B} \text{ (permutation circulaire)} \\ &= \oint_\Gamma i\, (\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{e_x}) \cdot \overrightarrow{d\ell} \text{ (permutation circulaire)}\end{aligned}$$

Appliquons le théorème de Stokes ($\Sigma$ étant une surface quelconque s'appuyant sur le contour fermé $\Gamma$ et dont l'orientation coïncide avec celle du contour fermé) :

$$\overrightarrow{R_m} \cdot \overrightarrow{e_x} = \iint_\Sigma \overrightarrow{rot}\left(i\,(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{e_x})\right) \cdot \overrightarrow{n}\, d^2S$$

En développant en coordonnées cartésiennes, et en utilisant : $div\,\overrightarrow{B} = 0$, on montre :

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{e_x}) = \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial x}$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{R_m} \cdot \overrightarrow{e_x} = \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial x} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}$$

où $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est le moment du dipôle magnétique.
Si le mouvement n'est qu'un mouvement de translation, $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est constant et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_m} &= \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial x} + \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial y} + \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial z} \\ &= \overrightarrow{grad}\,(\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B})\end{aligned}$$

## 20.3.4 Analogies entre dipôle magnétique et dipôle électrique

| | Dipôle magnétique | Dipôle électrique |
|---|---|---|
| Moment dipolaire | magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = i\,S\,\overrightarrow{n}$ | électrique $\overrightarrow{P} = q\,\overrightarrow{AB}$ |
| Énergie potentielle | magnétique $E_{pm} = -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B}$ | électrique $E_{pe} = -\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{E}$ |
| Moment des forces | $\overrightarrow{\Gamma_m} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B}$ | $\overrightarrow{\Gamma_e} = \overrightarrow{P} \wedge \overrightarrow{E}$ |
| Résultante des forces | $\overrightarrow{R_m} = \overrightarrow{grad}\,(\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B})$ | $\overrightarrow{R_e} = \overrightarrow{grad}\,(\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{E})$ |